

специалистов, обеспечивая формирование необходимых современному учителю математики знаний и умений, с учетом ресурсов конкретного вуза.

Лебедева Ирина Павловна
Пермский государственный
педагогический ун-т
Россия, Пермь
e-mail: lebedeva@pspu.ac.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

ОБ УПРАВЛЯЕМОЙ ЗАДАЧЕ ГУРСА-ДАРБУ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С СУММИРУЕМОЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ¹

© И. В. Лисаченко, В. И. Сумин

Рассмотрим управляемую задачу Гурса–Дарбу

$$\begin{aligned} x''_{t_1 t_2}(t) &= g(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t), u(t)), t \in \Pi \equiv [0, 1]^2, \\ x(t_1, 0) &= \varphi_1(t_1), t_1 \in [0, 1]; x(0, t_2) = \varphi_2(t_2), t_2 \in [0, 1], \end{aligned} \quad (1)$$

где управление – $u(t): \Pi \rightarrow \mathbf{R}^m$, $g(t, l_1, l_2, l_3, \mathbf{u}) \equiv g(t, \mathbf{l}, \mathbf{u}): \Pi \times \mathbf{R}^{3k} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ дифференцируема по $\mathbf{l} \equiv \{l_1, l_2, l_3\}$ для каждого $\mathbf{u}$ при п.в. t и вместе с $g'_1(t, \mathbf{l}, \mathbf{u})$ измерима по t при всех $\{\mathbf{l}, \mathbf{u}\}$ и непрерывна по $\{\mathbf{l}, \mathbf{u}\}$ для п.в. t , $\varphi_i(t_i): [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^k$ абсолютно непрерывны, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Управляемая задача (1) играет особую роль в теории оптимального управления распределенными системами. Вот уже много лет она фактически является «пробным камнем» этой теории. Так, например, первые достаточно общие условия *сохранения* (при возмущении управления) *глобальной разрешимости* (СГР) нелинейных распределенных систем были найдены именно для задачи Гурса–Дарбу [1]; история вопроса кратко изложена в [2]. При этом управления считались ограниченными и рассматривались абсолютно непрерывные решения задачи (1) с ограниченной смешанной производной. Более общие достаточные условия устойчивости существования таких глобальных решений задачи (1) были затем получены в [3]. В [1, 3] для (1) предполагалось выполненным следующее весьма общее условие:

$$\text{функции } g(t, \mathbf{l}, \mathbf{u}) \text{ и } g'_1(t, \mathbf{l}, \mathbf{u}) \text{ ограничены на любом ограниченном множестве.} \quad (2)$$

Условие (2) выполняется, например, если g и g'_1 непрерывны по совокупности переменных. Очевидно, что при условии (2) смешанная производная любого абсолютно непрерывного решения $x(\cdot)$ задачи (1), отвечающего ограниченному на Π управлению $u(\cdot)$, ограничена; если

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №07-01-00495).

же при этом ограничены производные функций $\varphi_i(\cdot)$, то ограничены и первые производные решения $x(\cdot)$.

Если условие (2) нарушается или управление $u(\cdot)$ не ограничено на Π , то смешанная производная и первые производные решения $x(\cdot)$ задачи (1) могут оказаться неограниченными. Однако в этих случаях для нелинейной управляемой задачи Гурса-Дарбу общего вида (1) до сих пор, видимо, никем не изучались важные для теории оптимального управления вопросы СГР. Доклад посвящен некоторым результатам, полученным авторами доклада в этом направлении (см., например, [4–6]) с помощью аппарата вольтерровых функциональных уравнений в лебеговых пространствах [7]. Именно, рассматривается случай, когда решение (1) имеет смысл искать в пространстве функций с суммируемой в степени $p \in (1, \infty)$ смешанной производной. Он допускает различные естественные варианты условий на порядок роста правой части дифференциального уравнения (1), которыми в этом случае можно заменить условие (2).

Приведем пример. Пусть: $p \in (1, \infty)$, $s \in [1, \infty]$; $\varphi'_1, \varphi'_2 \in L_p^k[0, 1]$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$; допустимы управления из ограниченного множества $D \subset L_s^m \equiv L_s^m(\Pi)$. Положим $f(t, \mathbf{l}, \mathbf{u}) \equiv g(t, l_1 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_2 + \varphi'_1(t_1), l_3 + \varphi'_2(t_2), \mathbf{u})$. Пусть g удовлетворяет следующему условию на порядок роста: формула $\hat{f}[\mathbf{y}, u](t) \equiv f(t, \mathbf{y}(t), u(t))$ определяет оператор $\hat{f}[\cdot, \cdot]: (L_\infty^k \times (L_p^k)^2) \times D \rightarrow L_p^k$, а формула $\hat{f}_1[\mathbf{y}, u](t) \equiv f'_1(t, \mathbf{y}(t), u(t))$ — ограниченный оператор $\hat{f}_1[\cdot, \cdot]: (L_\infty^k \times (L_p^k)^2) \times D \rightarrow L_p^{k \times k} \times (L_\infty^{k \times k})^2$. В этом случае глобальное решение (1) естественно искать в классе W абсолютно непрерывных функций с первыми и смешанной производными из L_p^k . Каждому $u \in D$ может отвечать не более одного такого решения. Множество тех $u(\cdot) \in D$, каждому из которых отвечает решение из W , обозначим Ω . Введем обозначения: $A_1[z](t) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$, $A_2[z](t) = \int_0^{t_2} z(t_1, \xi) d\xi$, $A_3[z](t) = \int_0^{t_1} z(\xi, t_2) d\xi$, $\mathbf{A}[z] \equiv \{A_1[z], A_2[z], A_3[z]\}$. Для $u(\cdot) \in D$, $u_0(\cdot) \in \Omega$ положим $r(u, u_0) \equiv \|\mathbf{A}[\Delta_u g(x_0)]\|_{L_\infty^k \times (L_p^k)^2}$, где

$$\Delta_u g(x_0) \equiv g(t, x_0(t), x'_{0t_1}(t), x'_{0t_2}(t), u(t)) - g(t, x_0(t), x'_{0t_1}(t), x'_{0t_2}(t), u_0(t)),$$

$x_0(\cdot)$ — глобальное решение (1), отвечающее $u_0(\cdot)$. Справедлива следующая теорема об условиях СГР [6].

Т е о р е м а. $\forall u_0(\cdot) \in \Omega \exists \delta > 0, C > 0: u(\cdot) \in D, r(u, u_0) < \delta \Rightarrow u(\cdot) \in \Omega$, причем $\|x - x_0\|_{L_\infty^k} + \|x'_{t_1} - x'_{0t_1}\|_{L_p^k} + \|x'_{t_2} - x'_{0t_2}\|_{L_p^k} \leq Cr(u, u_0)$, где $x(\cdot)$ — решение, отвечающее управлению $u(\cdot)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 5. С. 845–856.
2. Сумин В.И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика / Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. Вып. 1. С. 91–108.
3. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
4. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Управляемая задача Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной // Вестник ННГУ. Математика / Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. Вып. 1(3). С. 88–101.
5. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Управляемая задача Гурса-Дарбу в классах функций с суммируемой смешанной производной. II // Вестник ННГУ. Математика / Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Вып. 1(4). С. 65–79.

6. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Об условиях устойчивости существования глобальных решений управляемой задачи Гурса – Дарбу // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление / Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Вып. 2(31).
7. Сумин В.И. Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление / Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1998. Вып. 2(19). С. 138–151.

Лисаченко Ирина Владимировна
Нижегородский государственный ун-т
Россия, Нижний Новгород
e-mail: i_lisach@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович
Нижегородский государственный ун-т
Россия, Нижний Новгород
e-mail: v_sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

© В. В. Лукьянов

Рассмотрим линейную нестационарную задачу быстрого действия

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + T) = 0, \quad T \rightarrow \min, \quad (2)$$

где $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, $B \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n))$, $x \in AC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Множеством *допустимых* управлений $\mathcal{U}$ будем считать совокупность всех измеримых функций $t \rightarrow u(t)$, определенных на $\mathbb{R}$ и принимающих значения в $U = [-1, 1]^r \subset \mathbb{R}^r$.

Пусть $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi A(t), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*}). \quad (3)$$

Столбец матрицы $B(t)$ с номером j обозначим $b^j(t)$ и построим функции

$$\xi_i^j(t) \doteq \psi_i(t)b^j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r.$$

Для фиксированных $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ и ненулевого вектора $c = (c_1 \dots c_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $n_j = n_j(c)$ — количество геометрически различных (то есть без учета кратностей) корней функции $\xi^j(t; c) = c_1 \xi_1^j(t) + \dots + c_n \xi_n^j(t)$ на интервале $I_{t_0} = (t_0, t_0 + \sigma)$. Далее, обозначим $\sigma(t_0)$ — точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на интервале I_{t_0} выполнено неравенство

$$n_1 + \dots + n_r \leq n - 1. \quad (4)$$

О п р е д е л е н и е 1. Систему (1) будем называть *докритической* в точке $t_0 \in \mathbb{R}$ (см. [1]), если выполнено неравенство $\sigma(t_0) > 0$.